

# **Estructura de bandas fotónica de un cristal fotónico 2D formado por barras de TlCl en aire considerando un campo magnético externo.**

Danny Manuel Calvo Velasco

Trabajo de grado presentado al Departamento de Física  
para optar al título de Maestría en Ciencias Físicas

Tutor

Nelson Porras Montenegro, Ph. D.

UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICA  
SANTIAGO DE CALI

27 de agosto de 2014



# Índice general

<b>1. Introduccion</b>	<b>5</b>
<b>2. Antecedentes y Motivación</b>	<b>7</b>
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>9</b>
3.1. Método de Ondas Planas Revisado . . . . .	9
3.2. Reglas de Li y los Cristales Fotónicos 2D . . . . .	11
<b>4. Resultados</b>	<b>15</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>25</b>
<b>6. Perspectivas</b>	<b>27</b>
<b>A. Iones en un campo magnético.</b>	<b>29</b>
<b>B. Calculo función permitividad eléctrica efectiva</b>	<b>33</b>



# Resumen

Usando el método de ondas planas revisado, calculamos la estructura de bandas fotónica para un arreglo cuadrado de barras cuadradas de  $\text{TiCl}$  en aire, bajo la acción de un campo magnético de magnitud constante orientado en la dirección de los ejes de las barras. También presentamos la distribución de la radiación en la celda primitiva de la estructura. Encontramos que cuando el campo magnético es aplicado, la estructura de bandas presenta dos regiones de frecuencias donde la función dieléctrica de las barras es negativa, estas regiones presentan diferente ancho de banda y dependen de la magnitud del campo magnético. Cuando estudiamos estas regiones encontramos una distribución de bandas relacionada con un comportamiento típico de un sistema metal-dieléctrico, cuando el valor absoluto de la función dieléctrica es grande. Para frecuencias cerca a los ceros de la función dieléctrica encontramos una distribución de bandas relacionada con la existencia de plasmones superficiales localizados.



# Abstract

Using the Revised Plane Wave Method (RPWM) we calculated the Photonic Band Structure (PBS) for a square lattice of square TlCl rods embedded in air, under the action of a magnetic field of constant magnitude oriented along the rod axes. Also, we present the distribution of the radiation in the primitive cell of the structure. We found that when the magnetic field is on, the PBS presents two frequency regions where the dielectric function of the rods is negative, regions with different bandwidth depending on the magnetic field strength. In considering these regions, we found a band distribution related with a characteristic metallodielectric behavior, for large absolute values of the dielectric function. For frequencies near to the zeros of the dielectric function we found a band distribution related with the existences of localized surfaces plasmons.





# Capítulo 1

## Introduccion

En las pasadas décadas el estudio de los cristales fotónicos (*Photonic crystals* - PCs) y sus propiedades ópticas [1–3] despertaron el interés de la comunidad científica, gracias al descubrimiento de las brechas fotónicas que presentan estas estructuras, las cuales podemos describir como valores de frecuencia para los cuales la radiación electromagnética incidente sobre el material no puede propagarse, lo que ha permitido el desarrollo de nuevas tecnologías [4].

Es conocido que estos cristales, son el resultado de arreglos de materiales con diferentes valores de índices de refracción, lo que origina comportamientos diferentes para la radiación incidente a los descritos para los materiales que forman el cristal cuando estos se consideran en bloque. Se ha demostrado que la forma de la estructura de bandas, así como la presencia de las brechas fotónicas para los cristales fotónicos, depende de la diferencia en los índices de refracción de los materiales que forman el cristal, de la disposición geométrica y de las fracciones de ocupación de los materiales entre sí, haciendo posible el control de las propiedades ópticas del cristal, partiendo de la modificación de estos parámetros.

Los estudios realizados para estas estructuras son diversos, abarcando desde multicapas de planos de diferentes materiales para sistemas 1D [1, 5], a estructuras 3D complejas, incluyendo distribuciones fractales de un dieléctrico en aire limitada a una región del espacio [6]; también se ha incluido el estudio de defectos en los cristales, que corresponden a modificaciones de las simetrías de traslación en el material.

Para estudiar el comportamiento de la luz en un cristal fotónico utilizamos las ecuaciones de Maxwell. Para resolverlas muchas técnicas han sido desarrolladas como el método de expansión de los campos en ondas planas, diferencias finitas en dominio temporal, el método de ondas planas revisado entre otros [7], y han sido aplicados a diferentes sistemas con el propósito de estudiar sus respuestas ópticas [8–14]. Cuando un cristal fotónico está formado por materiales dispersivos, es posible localizar la radiación incidente en lugares específicos del cristal gracias al contraste en el índice de refracción entre el medio dispersivo y el medio que le rodea. En particular, los materiales polaritónicos pueden alcanzar grandes valores de la permitividad dieléctrica positivos o negativos que dependen de la frecuencia de la radiación incidente. En el caso de longitudes de onda largas, podemos escribir su permitividad como:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} \left( \frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega^2 - \omega_T^2} \right) \quad (1.1)$$

donde  $\omega_T$  y  $\omega_L$  son las frecuencias de los fonones ópticos transversales y longitudinales respectivamente, relacionadas por la ecuación de Lyddanne-Sachs-Teller y  $\epsilon_{\infty}$  es la respuesta dieléctrica para altas frecuencias [15]. Para frecuencias entre  $\omega_T$  y  $\omega_L$  tenemos que  $\epsilon < 0$ , estas frecuencias son conocidas como gap polaritónico.

Estudios previos muestran que la estructura de bandas fotónica puede ser modificada con el uso de agentes externos tales como campos magnéticos, presión hidrostática y temperatura [16–20]. En este trabajo presentamos el cálculo de la estructura de bandas fotónica para un cristal fotónico 2D formado por barras del material polaritónico  $\text{TiCl}$  en aire en presencia de campo magnético de magnitud constante orientado a lo largo de la dirección de los ejes de las barras cuando consideramos polarización TE para la radiación incidente. Los cálculos numéricos se realizaron con el método de ondas planas revisado [21], considerando las reglas de Li acerca del producto de funciones periódicas [22]. Encontramos que cuando un campo magnético es aplicado la función dieléctrica para el material polaritónico,  $\epsilon_b$ , es negativa para dos regiones de frecuencias y que el tamaño de estas regiones depende de la magnitud del campo aplicado. Para las frecuencias donde  $\epsilon_b < 0$ , la estructura de bandas presenta un comportamiento típico de un sistema metal-dieléctrico cuando  $|\epsilon_b| \gg 0$ . También para frecuencias cerca a los ceros de la función  $\epsilon_b$  encontramos una distribución de bandas que presentan poca dispersión, y que relacionamos con la existencia de plasmones superficiales localizados en las barras del cristal.

## Capítulo 2

# Antecedentes y Motivación

En 1994, Kuzmiak y sus colaboradores [8], estudiaron un sistema dispersivo formado por un arreglo infinito de varillas metálicas paralelas de sección transversal circular en el vacío, para lo cual aplicaron el método de expansión de los campos en ondas planas, reduciendo el problema del conocimiento de la estructura de bandas del sistema, a un problema estándar de auto-valores. Sin embargo, el método desarrollado por estos autores no era aplicable a cualquier tipo de dispersión, pues la función dieléctrica del metal se modeló usando la aproximación de electrón libre; más tarde en 1997, modificaron el método y consideraron GaAs como el material de las varillas [9], y en 1998 incluyeron efectos de absorción en el sistema [10].

En 2001, Sakoda y sus colaboradores usando el mismo sistema estudiado por Kuzmiak en [8], calcularon la estructura de bandas así como la distribución de campo usando un esquema basado en la radiación dipolar aplicado al método de diferencias finitas en dominio temporal (FDTD) [11, 12], mostrando que el tiempo de duración de los modos de oscilación característicos del sistema, depende fuertemente de la distribución de los campos, siendo localizados principalmente en la superficie de las varillas.

Esteban Moreno y sus colaboradores [13], demostraron que si bien la hipótesis de Sakoda y sus colaboradores sobre la radiación dipolar da respuesta a la localización de los campos en la estructura, para geometrías arbitrarias esta aproximación no es suficiente, razón por la cual es necesaria una generalización del esquema de cálculo considerando un conjunto de múltiples dipolos radiantes en la estructura.

En el año 2003 Huang y sus colaboradores estudiaron un cristal fotónico 2D formado por barras de material polaritónico en aire [14], presentando una manera de calcular las frecuencias alrededor de las cuales aparece el fenómeno de anticruzamiento de bandas presentes en la estructura de bandas fotónica cuando la frecuencia de la radiación incidente es cercana a la frecuencia  $\omega_T$ , concluyendo que para valores por debajo de dicha frecuencia existe una fuerte concentración del campo electromagnético en las barras del cristal, debido al alto valor del índice de refracción. En cuanto a frecuencias en el gap polaritónico, concluyeron que la distribución de las bandas en la estructura de bandas es resultado del comportamiento metálico de las barras, esto es cuando la función dieléctrica de las barras es negativa, por lo cual los campos se localizan principalmente en el medio que rodea a las barras.

En 2005 Shouyuan Shi y sus colaboradores [21], proponen una variación del método de ondas planas para calcular la estructura de bandas fotónica de cristales fotónicos 2D, que permite considerar medios materiales dispersivos; en esta descripción el problema de autovalores asociado a la estructura de bandas, permite el cálculo de los valores del vector de onda de la radiación incidente en términos de la frecuencia de dicha radiación,  $\vec{k} : \vec{k}(\omega)$ .

Debido al problema de convergencia numérica cuando se usa la representación de Fourier, Lifeng Li [22] propuso una forma de calcular los coeficientes de Fourier del producto de dos

funciones periódicas para una variable, que mejora la convergencia cuando consideramos una representación finita de las funciones. Estos resultados fueron generalizados por Philippe Lalanne y aplicados al cálculo de la estructura de bandas de cristales fotónicos 3D, cuando las superficies que separan los materiales que forman el cristal fotónico son planas [23].

Como podemos observar diversos métodos numéricos han sido desarrollados para estudiar el comportamiento de la luz en los cristales fotónicos, no obstante en este trabajo usamos el método de ondas planas revisado al cual se ha incluido la corrección hecha por Lalanne, para la escritura de las matrices que debemos resolver para calcular la estructura de bandas de nuestro sistema, el cual consiste en un arreglo cuadrado de varillas cuadradas de material polaritónico en aire en presencia de un campo magnético de magnitud uniforme.

## Capítulo 3

# Marco Teórico

En esta sección presentaremos el método de ondas planas revisado con el cual es posible calcular la estructura de bandas fotónica para un cristal fotónico 2D. Consideraremos un cristal formado por barras paralelas de un material con permitividad eléctrica  $\epsilon_b$  cuyos ejes están orientados a lo largo de la dirección  $z$  y que se encuentran rodeadas por un material con permitividad eléctrica  $\epsilon_a$ . El método desarrollado se presenta para un tipo de respuesta eléctrica no dispersiva, sin embargo es posible incluir la dispersión modificando en las expresiones los valores de  $\epsilon$  por sus correspondientes dependencias con la frecuencia. También presentaremos las reglas de Li para el producto de funciones periódicas y se aplicaran al método de ondas planas revisado para la formación de las matrices asociadas a la respuesta eléctrica del cristal fotónico.

### 3.1. Método de Ondas Planas Revisado

Considérese un cristal fotónico formado por barras paralelas de un material con permitividad eléctrica  $\epsilon_b$  cuyos ejes están orientados a lo largo de la dirección  $z$  y que se encuentran rodeadas por un material con permitividad eléctrica  $\epsilon_a$ . Las ecuaciones que describen el comportamiento de los campos eléctrico y magnético en un medio sin fuentes de cargas ni corrientes se pueden escribir como:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0. \quad (3.4)$$

Para materiales lineales e isotrópicos, y considerando ondas monocromáticas podemos escribir para los campos

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3.5)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (3.6)$$

donde  $\epsilon(\vec{r})$  es la función dieléctrica para el sistema.

Si el sistema estudiado posee simetría de traslación en el plano  $X - Y$ , podemos escribir para la función dieléctrica  $\epsilon(\vec{r} + \vec{R}) = \epsilon(\vec{r})$ , donde

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}_x + n \cdot \vec{a}_y, \quad (3.7)$$

y

$$\vec{G} = m \cdot \vec{b}_x + n \cdot \vec{b}_y, \quad (3.8)$$

son los vectores de traslación en el espacio real y recíproco respectivamente, relacionados por  $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi\delta_{i,j}$ . Debido a la periodicidad del sistema podemos escribir para los campos eléctrico y magnético

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_G \vec{E}_G e^{i(k+G)\cdot r}, \quad (3.9)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_G \vec{H}_G e^{i(k+G)\cdot r}, \quad (3.10)$$

en donde la sumatoria se realiza sobre los vectores  $\vec{G}$ , que son los vectores de traslación en el espacio recíproco, asociados a la red en el espacio real.

En el caso de una onda con polarización TE, ( $\vec{H} = (0, 0, H_z)$ ,  $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ ), las ecuaciones 3.1 y 3.2 toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= -i \frac{\omega}{c} \epsilon E_x, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i \frac{\omega}{c} \epsilon E_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i \frac{\omega}{c} H_z. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Remplazando 3.9 y 3.10 en 3.11, y tomando un número finito  $N$  de términos para las expansiones de los campos podemos escribir en forma matricial

$$\begin{aligned} (k_y + [[G_y]]) [H_z] &= -k_0 [[\epsilon_{xx}]] [E_x], \\ (k_x + [[G_x]]) [H_z] &= k_0 [[\epsilon_{yy}]] [E_y], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$(k_x + [[G_x]]) [E_y] - (k_y + [[G_y]]) [E_x] = k_0 [H_z],$$

donde  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ , y  $[[G_{x(y)}}]_{G,G'} = G_{x(y)} \delta_{G,G'}$ , son matrices diagonales de orden  $N$ .  $[E_x]$ ,  $[E_y]$  y  $[H_z]$  son vectores columna de orden  $N$  contruidos con los coeficientes de las expansiones 3.9 y 3.10. Las matrices  $[[\epsilon_{xx}]]$ ,  $[[\epsilon_{yy}]]$  son contruidas siguiendo las reglas de Li para el producto de funciones periódicas [22, 23].

Combinando las ecuaciones 3.12, tenemos que

$$k_x \begin{bmatrix} [E_y] \\ [H_z] \end{bmatrix} = \frac{1}{k_0} \begin{bmatrix} -k_0 [[G_x]] & k_0^2 - (k_y + [[G_y]]) [[\epsilon_{xx}]]^{-1} (k_y + [[G_y]]) \\ k_0^2 [[\epsilon_{yy}]] & -k_0 [[G_x]] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_y] \\ [H_z] \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$k_y \begin{bmatrix} [E_x] \\ [H_z] \end{bmatrix} = -\frac{1}{k_0} \begin{bmatrix} k_0 [[G_y]] & k_0^2 - (k_x + [[G_x]]) [[\epsilon_{yy}]]^{-1} (k_x + [[G_x]]) \\ k_0^2 [[\epsilon_{xx}]] & k_0 [[G_y]] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_x] \\ [H_z] \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

Como se observa, para un valor dado de  $\omega$  en esta formulación los autovalores calculados son las componentes del vector de onda,  $\vec{k} : \vec{k}(\omega)$ . También podemos ver que el problema de autovalores asociado es de orden  $2N$ , además de esto las matrices no son hermiticas, razón por la cual los autovalores serán complejos. Para calcular la estructura de bandas fotónica de nuestro sistema solo escogeremos aquellos autovalores que tengan una parte imaginaria nula, que corresponderán a modos propagantes en el cristal.

El problema de autovalores también revela una importante limitación para este método, y es que los materiales usados no deben presentar disipación, esto es una función dieléctrica de la forma  $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ . Un material con disipación implicaría que los autovectores calculados para nuestro problema presentasen una componente imaginaria haciendo muy difícil el criterio de escoger aquellos modos propagantes en la estructura, que en principio deberán ser aquellos que tienen un vector de onda con componente imaginaria nula o muy pequeña. Sin embargo este método puede ser usado para estimar el comportamiento de la luz en cristales fotónicos para frecuencias en los cuales la disipación en los materiales es despreciable.

### 3.2. Reglas de Li y los Cristales Fotónicos 2D

Históricamente el cálculo de la estructura de bandas usando la expansión en ondas planas de los campos está limitada por la convergencia del problema de autovalores asociado a la ecuación de onda de la radiación incidente en el cristal, en el caso de una disposición cristalina 2D esta limitación se observa principalmente para la polarización TE, aun cuando los materiales que forman el cristal no presentan respuestas dispersivas [23].

El trabajo de Li acerca del producto de funciones periódicas continuas mejora de manera notable la convergencia del problema relacionado con el cálculo de la estructura de bandas fotónica. En su trabajo original [22], se proponen tres diferentes reglas para la correcta formación del producto entre funciones que son periódicas, cuando la expansión de Fourier es truncada a un número  $N$  de términos.

De acuerdo a las reglas de formación del producto de funciones periódicas tenemos: si  $h(x)$  es el producto de dos funciones periódicas arbitrarias  $f(x)$  y  $g(x)$  Entonces los términos de la expansión de Fourier,  $h_n$ , de  $h(x)$  están dados por

$$h_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{n-m} g_m. \quad (3.15)$$

Este resultado es conocido como la regla de Laurent, la cual es correcta cuando la suma se extiende a infinito. Li muestra que esta regla de formación no es necesariamente correcta

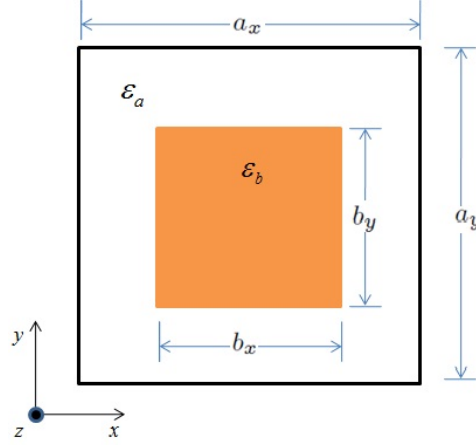


Figura 3.1: Unitary cell representation of a rectangular lattice of rectangular rods of a material with permittivity  $\epsilon_b$ , immersed in a material with permittivity  $\epsilon_a$ .  $a_x$  and  $a_y$  are the parameters of the lattice.  $b_x$  and  $b_y$  are the side sizes of the rod.

cuando la suma es truncada a un número finito de términos, es decir el problema real al calcular computacionalmente, siendo necesario el uso de las siguientes reglas para la correcta formación de la función producto:

(i) Dada  $h(x) = f(x)g(x)$  y alguna de las funciones  $f(x)$  o  $g(x)$  es continua en un punto  $x = x_0$ , la otra función puede ser discontinua en este punto. Entonces la regla de Laurent se puede usar y en este caso podemos escribir

$$[h] = [[f]] [g]. \quad (3.16)$$

donde  $[g]$  denota un vector construido a partir de los primeros  $N$  términos de la expansión de Fourier de  $g(x)$  y  $[[f]]$  denota a la matriz de orden  $N$  cuyo elemento  $(n, m)$  es  $f_{n-m}$ .

(ii) Dada  $h(x) = f(x)g(x)$  y siendo las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  discontinuas en un punto  $x = x_0$ , pero el producto  $h(x)$  es continuo en este punto, entonces la regla inversa debe aplicarse. Esto es.

$$[h] = \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ f \end{bmatrix} \right]^{-1} [g]. \quad (3.17)$$

aquí los elementos de  $\left[ \begin{bmatrix} 1 \\ f \end{bmatrix} \right]$  son construidos usando los coeficientes de la función inversa de  $f(x)$ .

(iii) Dada  $h(x) = f(x)g(x)$  y las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son discontinuas en un punto  $x = x_0$  y también la función  $h(x)$  es discontinua en este punto, entonces el producto no puede ser formado.

Con el ánimo de aplicar estas reglas al caso de un cristal fotónico 2D, es decir una situación en la cual existe una superficie donde el producto de dos funciones debe ser formado, Lalanne en su trabajo [23], propone una forma de construir el producto de la permitividad y el campo eléctrico que satisface las reglas de Li, cuando las superficie de los materiales que forman nuestro sistema son planas. En nuestro caso aplicaremos estos resultados a un sistema en el cual tenemos barras de sección transversal rectangular como se muestra en Fig. 3.1.

Es posible observar que la componente  $\epsilon E_x$  es continua a lo largo de la dirección  $x$ , mientras que  $E_x$  es continua a lo largo de la dirección  $y$ , por esta razón la regla inversa debe aplicarse a lo largo de la dirección  $x$ , mientras que la regla de Laurent debe aplicarse a lo largo de la dirección  $y$  para la construcción de la matriz que representa a  $\epsilon$  en el producto  $\epsilon E_x$ . En este caso tenemos que



$$[[\epsilon_{xx}]]_{mn,m'n'} = \frac{1}{a_y} \int_{-a_y/2}^{a_y/2} [[A_x^{-1}]]_{m,m'} e^{-i(n-n')g_y y} dy, \quad (3.18)$$

$$[[A_x]]_{m,m'} = \frac{1}{a_x} \int_{-a_x/2}^{a_x/2} \frac{1}{\epsilon} e^{-i(m-m')g_x x} dx, \quad (3.19)$$

donde  $g_i = |\vec{b}_i|$ ; los coeficientes de las matrices relacionan los términos  $\vec{G} = m\vec{b}_x + n\vec{b}_y$  con  $\vec{G}' = m'\vec{b}_x + n'\vec{b}_y$ .

Una construcción similar se debe aplicar para el caso de la formación del producto  $\epsilon E_y$ , en este caso el producto es continuo a lo largo de la dirección  $y$  mientras que  $E_y$  es continuo a lo largo de la dirección  $x$ . por esa razón aplicamos la regla inversa a lo largo de la dirección  $y$ , mientras que aplicamos la regla de Laurent a lo largo de la dirección  $x$ , para la matriz que representa a  $\epsilon$  en el producto, obteniendo

$$[[\epsilon_{yy}]]_{mn,m'n'} = \frac{1}{a_x} \int_{-a_x/2}^{a_x/2} [[A_y^{-1}]]_{n,n'} e^{-i(m-m')g_x x} dx, \quad (3.20)$$

$$[[A_y]]_{n,n'} = \frac{1}{a_y} \int_{-a_y/2}^{a_y/2} \frac{1}{\epsilon} e^{-i(n-n')g_y y} dy. \quad (3.21)$$

En nuestro caso, podemos escribir para la función dieléctrica

$$\epsilon(x, y) = \epsilon_a + (\epsilon_b - \epsilon_a) S(x, y), \quad (3.22)$$

donde  $S$  es una función que es 1 en las barras y 0 fuera de ellas. Es posible mostrar que la matriz  $[[\epsilon_{xx}]]$  tendrá la forma

$$[[\epsilon_{xx}]]_{mn,m'n'} = \begin{cases} [[A_{1,x}^{-1}]]_{m,m'} \left(1 - \frac{b_y}{a_y}\right) + \frac{b_y}{a_y} [[A_{2,x}^{-1}]]_{m,m'} & , \quad n = n' \\ \frac{b_y}{a_y} \frac{\sin((n-n')g_y b_y/2)}{((n-n')g_y b_y/2)} \left( [[A_{2,x}^{-1}]]_{m,m'} - [[A_{1,x}^{-1}]]_{m,m'} \right) & , \quad n \neq n' \end{cases} \quad (3.23)$$

donde

$$[[A_{1,x}]]_{m,m'} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_a} & , \quad m = m' \\ 0 & , \quad m \neq m' \end{cases} \quad (3.24)$$

$$[[A_{2,x}]]_{m,m'} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_a} + \frac{b_x}{a_x} \left( \frac{1}{\epsilon_b} - \frac{1}{\epsilon_a} \right) & , \quad m = m' \\ \frac{b_x}{a_x} \left( \frac{1}{\epsilon_b} - \frac{1}{\epsilon_a} \right) \frac{\sin((m-m')g_x b_x/2)}{(m-m')g_x b_x/2} & , \quad m \neq m'. \end{cases} \quad (3.25)$$

De forma análoga tenemos para  $[[\epsilon_{yy}]]$

$$[[\epsilon_{yy}]]_{mn,m'n'} = \begin{cases} [[A_{1,y}^{-1}]]_{n,n'} \left(1 - \frac{b_x}{a_x}\right) + \frac{b_x}{a_x} [[A_{2,y}^{-1}]]_{n,n'} & , \quad m = m' \\ \frac{b_x}{a_x} \frac{\sin((m-m')g_x b_x/2)}{(m-m')g_x b_x/2} \left( [[A_{2,y}^{-1}]]_{n,n'} - [[A_{1,y}^{-1}]]_{n,n'} \right) & , \quad m \neq m' \end{cases} \quad (3.26)$$

donde

$$[[A_{1,y}]]_{n,n'} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_a} & , \quad n = n' \\ 0 & , \quad n \neq n' \end{cases} \quad (3.27)$$

$$[[A_{2,y}]]_{n,n'} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_a} + \frac{b_y}{a_y} \left( \frac{1}{\epsilon_b} - \frac{1}{\epsilon_a} \right) & , \quad n = n' \\ \frac{b_y}{a_y} \left( \frac{1}{\epsilon_b} - \frac{1}{\epsilon_a} \right) \frac{\sin((n-n')g_y b_y/2)}{(n-n')g_y b_y/2} & , \quad n \neq n'. \end{cases} \quad (3.28)$$

Las expresiones calculadas para las matrices  $[[\epsilon_{xx}]]$  y  $[[\epsilon_{yy}]]$  se emplearan en el problema de autovalores asociado al método de ondas planas revisado, para el cálculo de la estructura de bandas de nuestro cristal fotónico.

## Capítulo 4

# Resultados

En este capítulo estudiaremos el efecto de un campo magnético sobre la estructura de bandas cuando este se aplica en la dirección de los ejes de las barras para un cristal fotónico, Fig. 4.1.

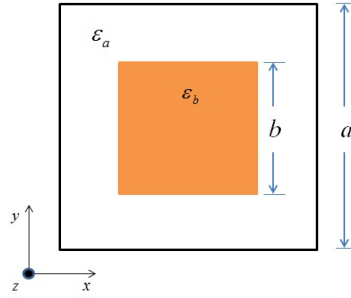


Figura 4.1: Representación de la celda unitaria para un arreglo cuadrado de barras cuadradas de un material con permitividad  $\epsilon_b$ , inmerso en un material con permitividad  $\epsilon_a$ .  $a$  es el parámetro de la red y  $b$  es el tamaño de uno de los lados de la barra. El campo magnético externo es aplicado en la dirección  $z$ .

Consideramos un material polaritónico formado por dos iones en la celda primitiva, el cual tiene una respuesta eléctrica dispersiva que es negativa para frecuencias entre  $\omega_T$  y  $\omega_L$  ( $\omega_T < \omega < \omega_L$ ) asociadas a los modos de oscilación longitudinal y transversal respectivamente, y que podemos escribir de la forma [15]:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty \left( \frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega^2 - \omega_T^2} \right). \quad (4.1)$$

Al aplicar un campo magnético sobre el material polaritónico, aparece una respuesta anisotrópica dada por:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & -i\epsilon_2 & 0 \\ i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

donde

$$\epsilon_1 = \epsilon_\infty \left[ 1 + \frac{(\omega_L^2 - \omega_T^2)(\omega_T^2 - \omega^2)}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^2 \omega^2} \right], \quad (4.3)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_\infty \frac{\omega_s \omega (\omega_T^2 - \omega^2)}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^2 \omega^2}, \quad (4.4)$$

$$\epsilon_z = \epsilon_\infty \left( \frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega^2 - \omega_T^2} \right), \quad (4.5)$$

aquí

$$\omega_s = qB/\mu c \quad (4.6)$$

es una frecuencia característica del material polaritónico que depende de la carga efectiva de los iones así como de su masa reducida y del campo magnético aplicado. (véase apéndice A). Es posible observar de las ecuaciones 4.3, 4.4 y 4.5 que cuando el campo magnético es cero, esto es  $\omega_s = 0$ , tenemos que  $\epsilon_1 = \epsilon_z$  y  $\epsilon_2 = 0$ .

La ecuación 4.2 muestra una respuesta anisotrópica en el plano  $X - Y$ , perpendicular a la dirección del campo magnético aplicado. En el caso de una onda incidente sobre el cristal con polarización TE, es posible mostrar que el material polaritónico presentara una respuesta eléctrica efectiva de la forma (véase apéndice B) [24]:

$$\epsilon_b = \epsilon_1 - \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1}. \quad (4.7)$$

En este trabajo estudiaremos un cristal fotónico formado por barras cuadradas de TlCl como el material polaritónico en aire en presencia de un campo magnético, con el propósito de comparar nuestros resultados con los resultados previos presentados por K.C. Huang *et al.* [14], los cuales estudiaron este mismo sistema pero sin considerar el efecto del campo magnético. Los parámetros del TlCl son  $\omega_T = 12 \times 10^{12}$  rad/s,  $\omega_L = 30 \times 10^{12}$  rad/s y  $\epsilon_\infty = 5.1$  [15], en unidades normalizadas para  $a = 62.8 \mu\text{m}$  toman los valores de  $\omega_T a/2\pi c = 0.4$  y  $\omega_L a/2\pi c = 1.0$ .

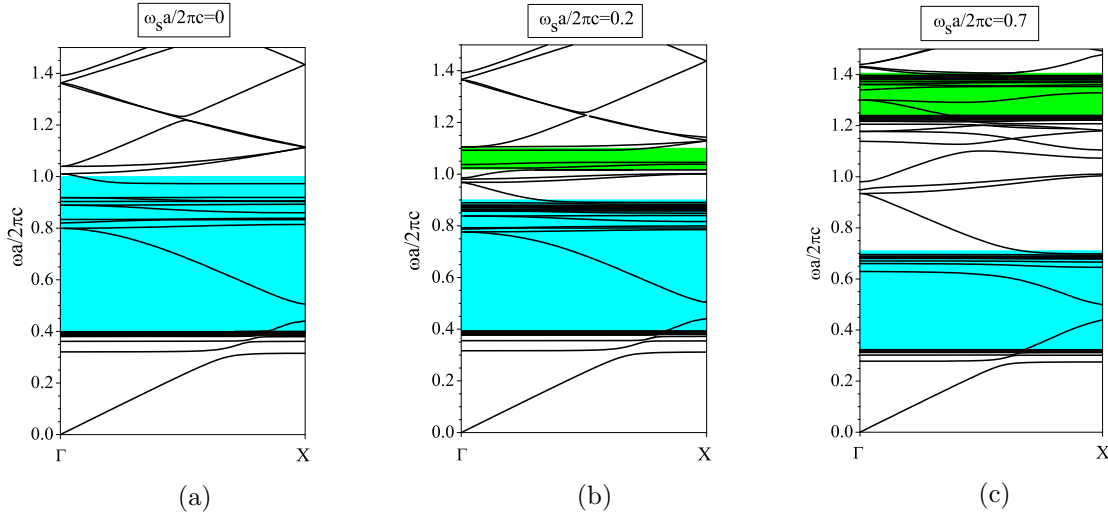


Figura 4.2: Estructura de bandas fotónica en la dirección  $\Gamma - X$  de un arreglo cuadrado de barras cuadradas de TlCl en aire con  $b/a = 0.25$ ,  $\epsilon_\infty = 5.1$ ,  $\omega_T a/2\pi c = 0.4$ ,  $\omega_L a/2\pi c = 1.0$  para  $a = 62.8 \mu\text{m}$ , en presencia de un campo magnético aplicado considerando polarización TE. La magnitud del campo magnético es tal que: (a)  $\omega_s a/2\pi c = 0$ , (b)  $\omega_s a/2\pi c = 0.2$ , (c)  $\omega_s a/2\pi c = 0.7$ . Las áreas azules y verdes muestran los valores de frecuencia para los cuales  $\epsilon_b < 0$ .

En la Fig.4.2, presentamos la estructura de bandas fotónica para nuestro sistema, cuando consideramos tres diferentes valores de campo magnético tales que  $\omega_s a/2\pi c = 0, 0.2, 0.7$ . La aplicación del campo magnético origina la formación de dos regiones de frecuencias donde  $\epsilon_b < 0$ , Figs. 4.2b y 4.2c, cuyos anchos de banda dependen de la magnitud del campo magnético. Como la masa de los iones es miles de veces mayor que la del electrón libre este efecto es perceptible cuando la magnitud del campo magnético es grande, del orden de  $10^6$ T (En el caso del TlCl:  $3.1 \times 10^6$ T para  $\omega_s a/2\pi c = 0.2$  y  $10.8 \times 10^6$ T para  $\omega_s a/2\pi c = 0.7$ ).

De acuerdo a K.C. Huang *et al.* [14], para  $\omega_s a/2\pi c = 0$ , la dispersión presentada en la estructura de bandas para frecuencias por debajo del gap polaritónico pero cerca de  $\omega_T$ , es decir en frecuencias para las cuales  $\epsilon_b \rightarrow \infty$ , corresponde a una concentración de la radiación electromagnética al interior de las barras, las cuales en la frontera de la zona de Brillouin están relacionadas con una distribución al interior de las barras característica de un comportamiento tipo guía de onda. La dispersión presentada en la estructura de bandas, similar a un comportamiento de anticruzamiento de bandas, se origina debido a que la concentración de la radiación al interior de las barras no es completa, es decir parte de la radiación está en el material que rodea las barras, lo que permite la interacción entre las barras que forman el cristal. La distribución de bandas para frecuencias en el gap polaritónico donde  $\epsilon_b < 0$ , es parecida a una distribución característica de un cristal fotónico formado por barras de un metal en aire, llamaremos a esta distribución metal-dieléctrico la cual se caracteriza por presentar una distribución de campo que esta principalmente localizado al exterior de las barras. Al restringir la descripción a frecuencias en el gap polaritónico para las cuales  $\epsilon_b < 0$  pero cercano a 0, observamos la aparición de bandas con poca dispersión, las cuales deben estar relacionadas con la existencia de modos de superficie en las barras [12]. Estos modos de superficie corresponderán a modos de oscilación colectiva de los iones en la superficie de las barras de TlCl, que se acoplan a la radiación electromagnética.

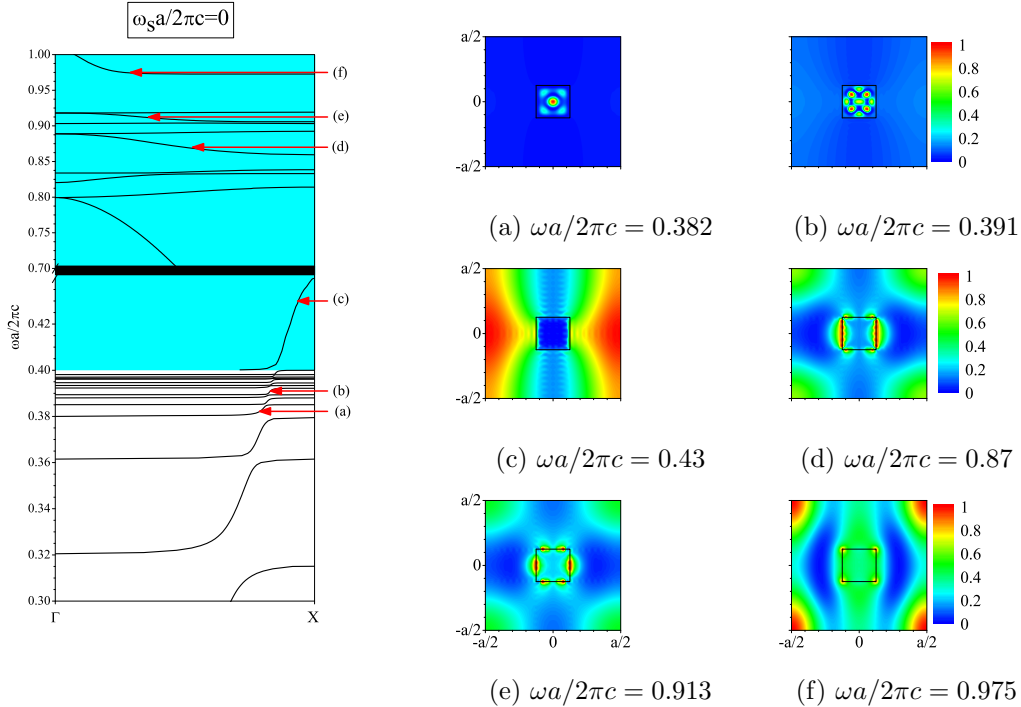


Figura 4.3: Amplificación de la estructura de bandas fotónica presentada en 4.2a con  $\omega_s a/2\pi c = 0$  y algunas distribuciones de  $|H_z|^2$  en la celda unitaria. Los valores de frecuencia en unidades de  $2\pi c/a$  varían entre 0.30 y 0.44 y entre 0.7 y 1.0. La región azul muestra valores de frecuencia para los cuales  $\epsilon_b < 0$ .

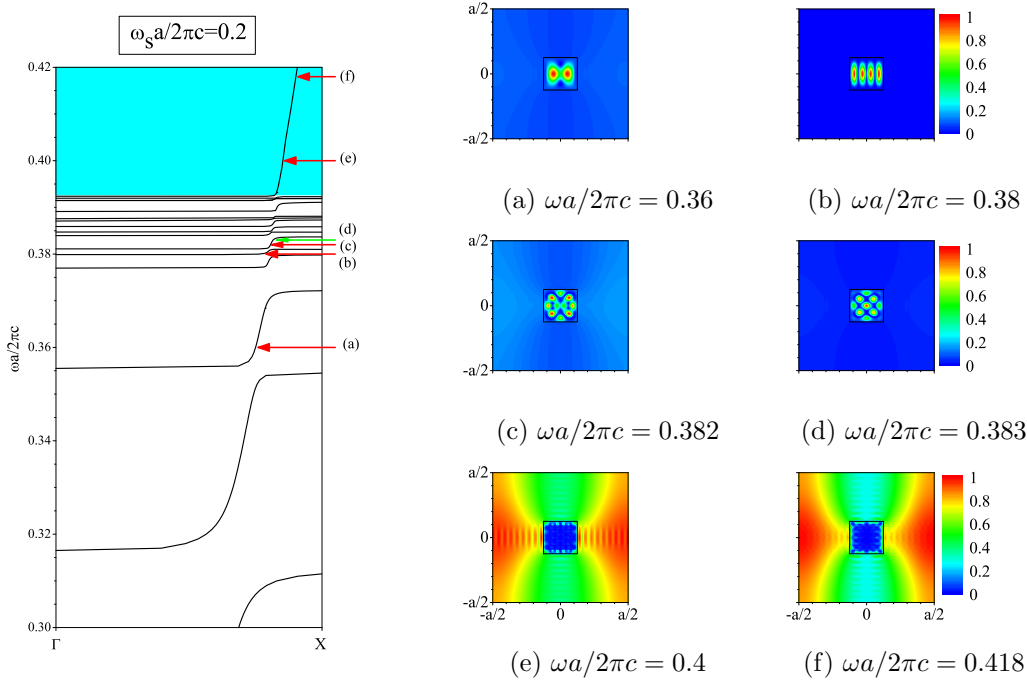


Figura 4.4: Amplificación de la estructura de bandas fotónica presentada en 4.2b con  $\omega_s a/2\pi c = 0.2$  y algunas distribuciones de  $|H_z|^2$  en la celda unitaria. Los valores de frecuencia en unidades de  $2\pi c/a$  varían entre 0.30 y 0.42. La región azul muestra valores de frecuencia para los cuales  $\epsilon_b < 0$ .

En la Fig. 4.3 presentamos la distribución de  $|H_z|^2$  en la celda unitaria, para  $\omega_s a/2\pi c = 0$ , para diferentes valores de frecuencias, debajo de  $\omega_T$  y en el gap polaritónico. En las Figs. 4.3a y 4.3b se observa la distribución de campo para frecuencias en el rango presentado por Huang *et al.* [14], mostrando la localización de campo al interior de las barras para frecuencias por debajo del gap polaritónico. Observamos que el campo es concentrado en el interior de las barras y esa distribución depende del valor de frecuencia, también observamos una distribución de campo muy pequeña fuera de las barras. En la Fig 4.3c mostramos la distribución de la intensidad de campo para frecuencias en el gap polaritónico con  $|\epsilon_b| \gg 1$ . Es posible notar la expulsión del campo al exterior de las barras, dejando parte de la radiación cerca a las superficies de las barras, lo que sugiere una interacción débil de la radiación electromagnética con los iones en la superficie de las barras. En otro caso tenemos que para valores de frecuencia superiores en el gap polaritónico como se muestra en la Fig. 4.3d, la distribución de campo sugiere la formación de plasmones superficiales. De la misma manera en la Fig. 4.3e podemos ver que parte de la radiación está localizada en las esquinas de las barras, como un sistema multipolar, y también podemos observar un incremento de la radiación al interior de las barras. Como podemos ver en la secuencia de figuras de 4.3c hasta 4.3f la respuesta eléctrica negativa de las barras, desplaza el campo del interior al exterior, pero es tal que no es suficiente para prohibir que parte del campo este en el interior de las barras, este comportamiento permite la formación de altas concentraciones de campo en la superficie de las barras.

Las Figs. 4.4 y 4.5 presentan una amplificación de la estructura de bandas presentada en la Fig. 4.2b para el cristal fotónico cuando se considera la acción de un campo magnético aplicado en la dirección de los ejes de las barras, así como la distribución de la radiación incidente en la celda unitaria del cristal para  $\omega_s a/2\pi c = 0.2$ .

La Fig. 4.4 presenta la distribución de campo para frecuencias entre 0.30 y 0.42, donde  $\epsilon_b$

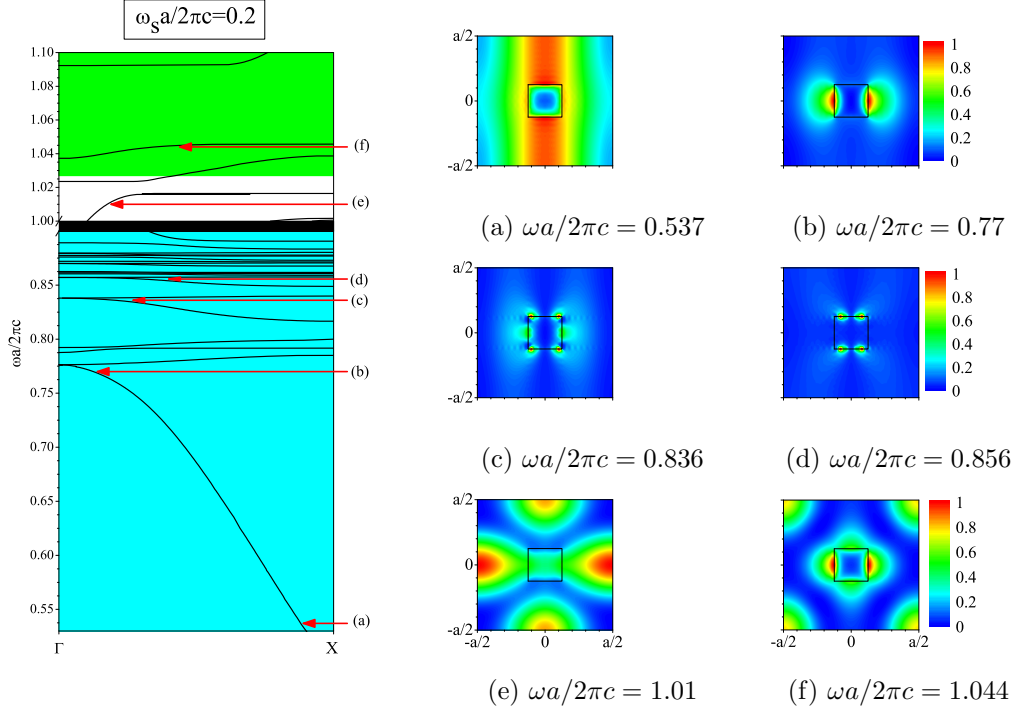


Figura 4.5: Amplificación de la estructura de bandas fotónica presentada en 4.2b con  $\omega_s a/2\pi c = 0.2$  y algunas distribuciones de  $|H_z|^2$  en la celda unitaria. Los valores de frecuencia en unidades de  $2\pi c/a$  varían entre 0.54 y 0.89 y entre 1.0 y 1.1. Las regiones sombreadas muestran valores de frecuencia para los cuales  $\epsilon_b < 0$ .

toma diferentes valores. Para las frecuencias en las Figs. 4.4a a 4.4d  $\epsilon_b > 0$ . Para las frecuencias en las Figs. 4.4e y 4.4f  $\epsilon_b < 0$ . En las Figs. 4.4a hasta 4.4d observamos la evolución de la distribución de intensidad de campo en el interior de los barras para diferentes frecuencias mostrando una fuerte localización de la radiación electromagnética en su interior, mientras que en las Figs. 4.4e y 4.4f observamos que la radiación es expulsada de las barras al aire, aun cuando una pequeña parte de la radiación está presente cerca de la superficie de las barras. También podemos observar para las Figs. 4.3a y 4.4c, las cuales muestran la distribución de campo para la misma frecuencia, existe una fuerte localización al interior de las barras, pero la distribución de campo es claramente diferente debido a la presencia del campo magnético aplicado sobre el cristal.

La distribución de campo para frecuencias entre 0.54 y 0.90 y entre 1.00 y 1.10 es presentada en la Fig. 4.5. Figs. 4.5a a 4.5d son para  $\epsilon_b < 0$ , la Fig. 4.5e es para  $\epsilon_b > 0$  y la Fig. 4.5f es para  $\epsilon_b < 0$ .

En la Fig. 4.5a observamos que parte de la radiación es expulsada parcialmente de las barras, pero cuando la frecuencia se incrementa, Fig. 4.5b, observamos que la radiación comienza a localizarse en su superficie. En las Figs. 4.5c y 4.5d, observamos que la radiación está limitada a las superficies de las barras, recordando un sistema multipolar, esto obedece a la competición entre la expulsión y la concentración de la radiación en las barras. La distribución de campo para la frecuencia 1.01 con  $\epsilon_b \gg 1$  es presentada en la Fig. 4.5e observamos que la distribución de campo se localiza principalmente al exterior de la barra. En el caso de Fig. 4.5f donde  $\epsilon_b < 0$  con  $|\epsilon_b| \gg 1$ . Observamos una fuerte concentración de campo en la superficie de las barras.

Las Figs. 4.6 hasta 4.9 presenta la amplificación de las Fig. 4.2c con un campo magnético

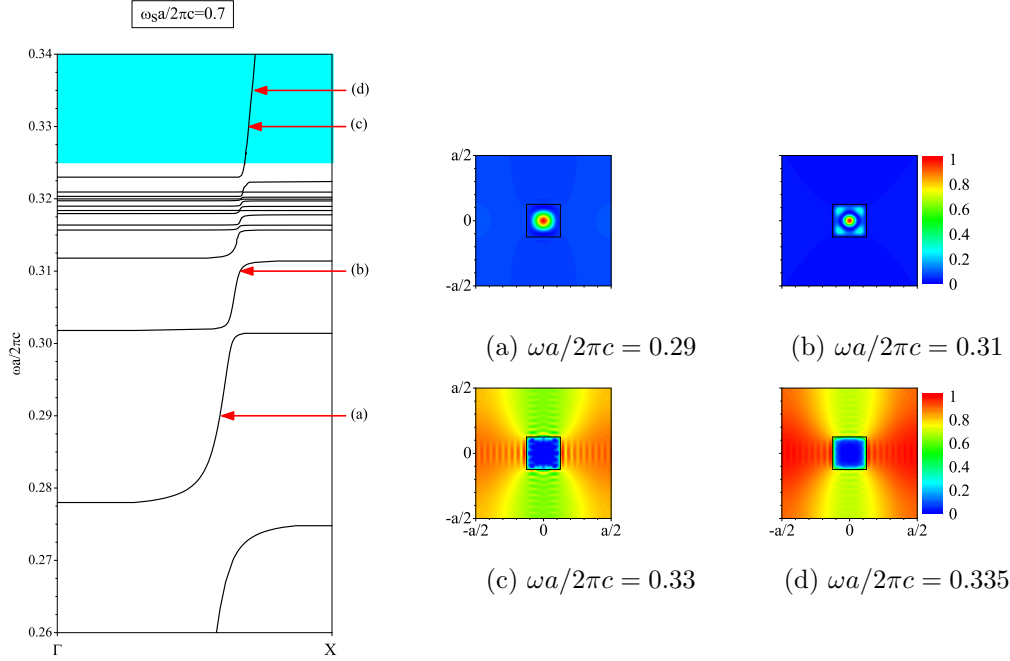


Figura 4.6: Amplificación de la estructura de bandas fotónica presentada en 4.2c con  $\omega_s a / 2\pi c = 0.7$  y algunas distribuciones de  $|H_z|^2$  en la celda unitaria. Los valores de frecuencia en unidades de  $2\pi c/a$  varían entre 0.26 y 0.34. La región azul muestra valores de frecuencia para los cuales  $\epsilon_b < 0$ .

externo aplicado para el cual  $\omega_s a / 2\pi c = 0.7$ , así como la distribución de la intensidad de campo para algunas frecuencias.

En la Fig. 4.6 presentamos la estructura de bandas para frecuencias entre 0.26 y 0.34. Figs. 4.6a y 4.6b muestran una fuerte concentración del campo al interior de las barras para frecuencias con  $\epsilon_b \gg 1$ . En las Figs. 4.6c y 4.6d es posible observar la expulsión de campo de las barras al material que les rodea, de la misma forma que ocurre para  $\omega_s a / 2\pi c = 0, 0.2$ , para frecuencias en las cuales la función dieléctrica de las barras  $\epsilon_b < 0$  con  $|\epsilon_b| \gg 1$ , Figs. 4.3c, 4.4e y 4.4f. También podemos observar una distribución de campo similar al comparar las distribuciones presentadas en las Figs. 4.3a y 4.6b aun cuando en la primera no hay campo magnético aplicado.

La Fig. 4.7 presenta la amplificación de la estructura de bandas fotónica para frecuencias entre 0.54 y 0.72. La intensidad de campo se presenta para frecuencias para las cuales  $\epsilon_b < 0$ . En la Fig. 4.7a observamos una distribución de campo principalmente fuera de las barras, así como una pequeña parte de la radiación al interior de las barras. Figs. 4.7b a 4.7e muestran una fuerte concentración del campo en la superficie de las barras lo cual sugiere la formación de modos superficiales. En la Fig. 4.7f es posible ver que una pequeña parte de la radiación está localizada en las esquinas de las barras, no obstante existe una fuerte concentración del campo en la región entre las barras. Comparando estos resultados con los presentados para los casos  $\omega_s a / 2\pi c = 0$  y 0.2, observamos el comportamiento típico de la localización de campo en las superficies de las barras cuando el valor absoluto de  $\epsilon_b$  se hace pequeño.

En la Fig. 4.8 presentamos una amplificación de la estructura de bandas fotónica para frecuencias entre 1.21 y 1.24 para las cuales  $\epsilon_b \gg 1$ . La estructura de bandas presenta bandas con poca dispersión cuando la frecuencia se incrementa así como la aparición del fenómeno de



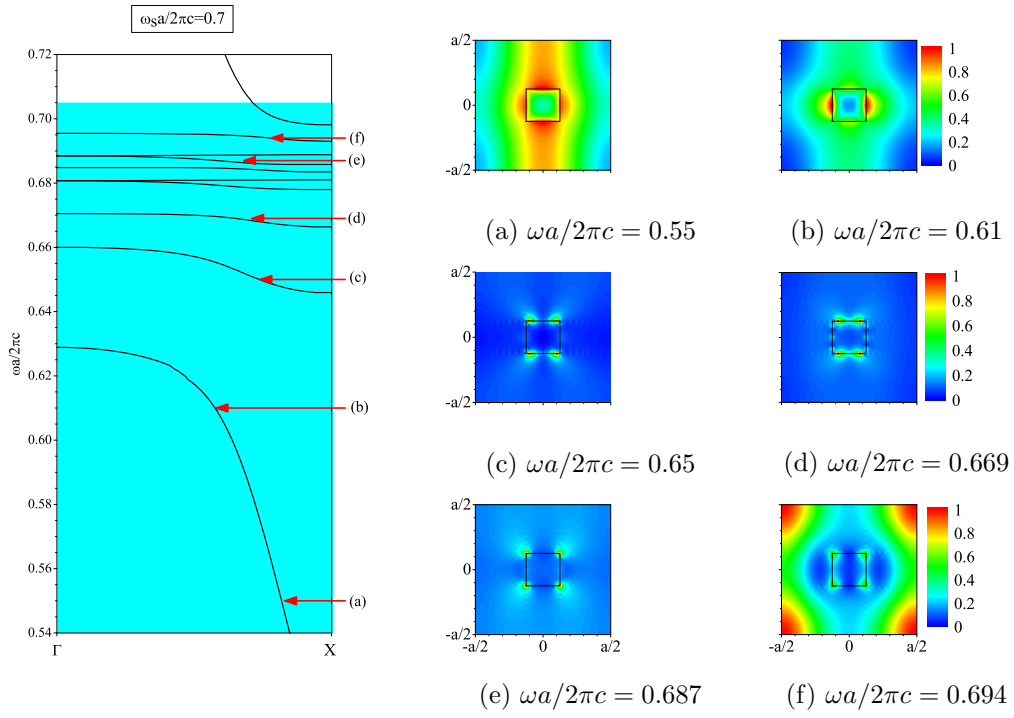


Figura 4.7: Amplificación de la estructura de bandas fotónica presentada en 4.2c con  $\omega_s a/2\pi c = 0.7$  y algunas distribuciones de  $|H_z|^2$  en la celda unitaria. Los valores de frecuencia en unidades de  $2\pi c/a$  varían entre 0.54 y 0.72. La región azul muestra valores de frecuencia para los cuales  $\epsilon_b < 0$ .

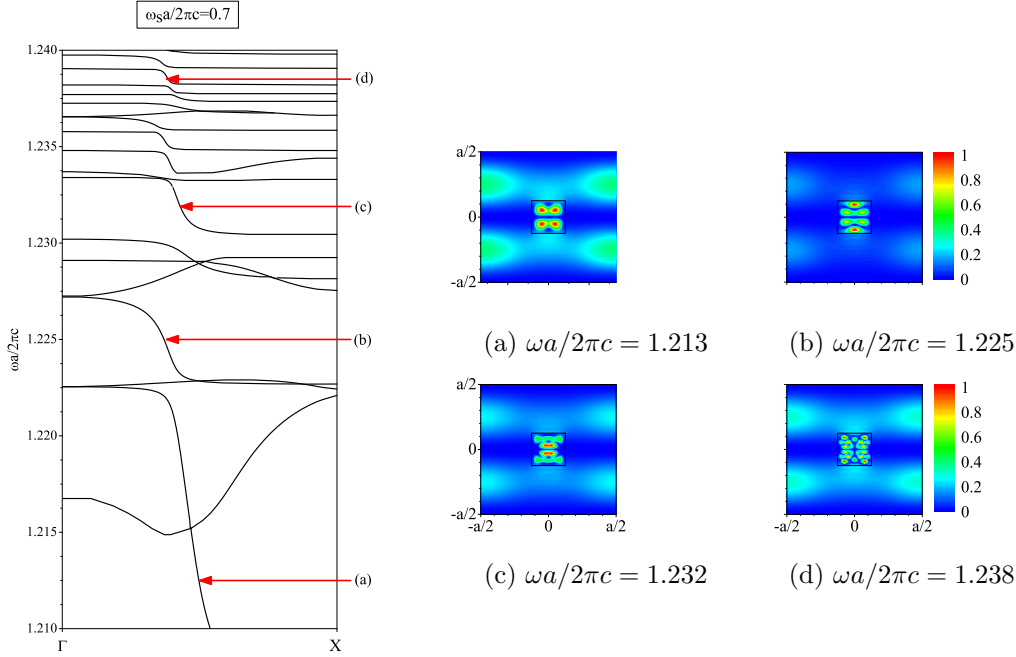


Figura 4.8: Amplificación de la estructura de bandas fotónica presentada en 4.2c con  $\omega_s a/2\pi c = 0.7$  y algunas distribuciones de  $|H_z|^2$  en la celda unitaria. Los valores de frecuencia en unidades de  $2\pi c/a$  varían entre 1.21 y 1.24. Estos resultados son para  $\epsilon_b > 0$ .

anticruzamiento de bandas. En las Figs. 4.8a a 4.8d podemos ver que el campo es concentrado principalmente al interior de las barras, redistribuyéndose en puntos de alta intensidad al variar la frecuencia.

En la Fig. 4.9 presentamos la amplificación de la estructura de bandas para frecuencias entre 1.3 y 1.4 para las cuales  $\epsilon_b < 0$ . La Fig. 4.9a muestra la formación de modos superficiales, comportamiento que también es evidente en las Figs. 4.9b A 4.9d, particularmente para la frecuencia 1.385 en la Fig. 4.9d se observa que esta localización de campo esta mayormente limitada a las esquinas de las barras.

Como pudimos observar la acción del campo magnético sobre el cristal fotónico modifica la estructura de bandas gracias a la variación de la respuesta dieléctrica del material polaritónico al agente externo. Pudimos observar que la estructura de bandas para frecuencias en las cuales  $\epsilon_b < 0$  presentan una distribución típica de un sistema metal-dieléctrico, gracias a los altos valores de  $|\epsilon_b|$  que se alcanzan para estas frecuencias y que se encuentran asociados a una distribución de campo que esta principalmente localizado al exterior de las barras del material polaritónico; en contraste para los valores de frecuencia con  $\epsilon_b < 0$  pero cercano a 0 encontramos una distribución de bandas con poca dispersión para las cuales se pudo observar distribuciones de campo asociadas con la formación de plasmones superficiales localizados en las superficies de las barras. Para frecuencias para las cuales  $\epsilon_b > 0$  pudimos observar que la estructura de bandas presenta el fenómeno de anticruzamiento de bandas siendo este comportamiento asociada a la fuerte localización de la radiación electromagnética al interior de las barras del material polaritónico cuando el valor de  $\epsilon_b \gg 1$ .

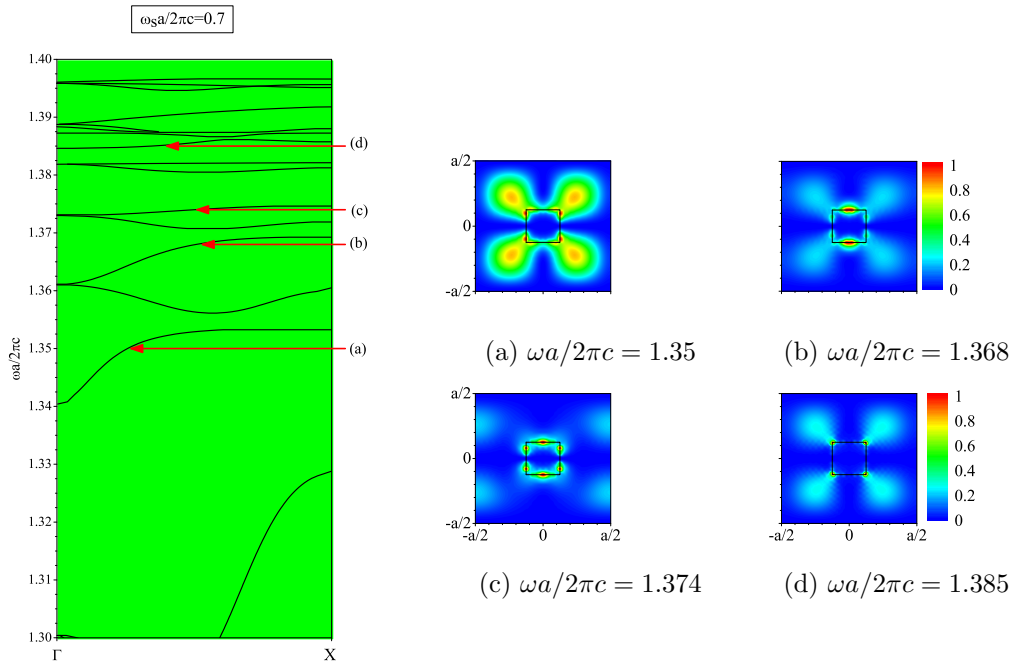


Figura 4.9: Amplificación de la estructura de bandas fotónica presentada en 4.2c con  $\omega_s a/2\pi c = 0.7$  y algunas distribuciones de  $|H_z|^2$  en la celda unitaria. Los valores de frecuencia en unidades de  $2\pi c/a$  varían entre 1.3 y 1.4. Estos resultados son para  $\epsilon_b < 0$ .



## Capítulo 5

# Conclusiones

Investigaciones previas a este trabajo muestran que los cristales fotónicos formados con materiales dispersivos presentan una excitante fenomenología que mejoran el control de la propagación de la luz usando agentes externos. En este trabajo, usamos el método de ondas planas revisado para calcular la estructura de bandas fotónica en la dirección  $\Gamma - X$  para un cristal fotónico formado por un arreglo cuadrado de barras cuadradas de  $\text{TiCl}$  (material polaritónico) rodeadas en aire, bajo la acción de un campo magnético de magnitud constante aplicado en la dirección del eje de las barras para la polarización TE. Encontramos que la estructura de bandas fotónica de el cristal fotónico es modificado por la presencia del campo magnético aplicado, relocalizando y moviendo la estructura de bandas hacia frecuencias menores y mayores creando mas bandas en las regiones de frecuencias donde  $\epsilon_b < 0$ , debido a la variación de la variación de la respuesta dieléctrica del el material polaritónico por la acción del campo magnético. Por medio de la distribución de campo encontramos que las bandas con poca dispersión para frecuencias donde  $\epsilon_b < 0$ , encontramos que el campo es localizado principalmente en la superficie de las barras que relacionamos con la existencia de plasmones superficiales localizados en la superficies de las barras. También encontramos una fuerte localización de la intensidad de campo en el interior de las barras, para frecuencias donde  $\epsilon_b \gg 1$ .



## Capítulo 6

# Perspectivas

Gracias al avance en la comprensión de la interacción entre la radiación electromagnética y la materia, el desarrollo de nuevas tecnologías basadas en plasmones ha tenido un crecimiento significativo en las últimas décadas [25], siendo sus principales aplicaciones sensores ultra sensibles, celdas solares, microscopia de alta resolución y técnicas médicas revolucionarias. Investigaciones previas junto a nuestros resultados acerca de la localización de plasmones superficiales en estructuras como cristales fotónicos hechos de barras de material polaritónico en aire, nos motivan a continuar con el estudio de las propiedades ópticas de sistemas como cuasi cristales 2D formados por materiales polaritónicos, ferromagnéticos y metamateriales [26–33], bajo la acción de agentes externos como presión, temperatura, y campos eléctricos y magnéticos.





## Apéndice A

# Iones en un campo magnético.

Sean dos cargas  $q$  y  $-q$  en una región con campo magnético uniforme, entonces podemos describir el movimiento de los iones en el material por la ecuación:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega_T^2\vec{r} + \frac{q}{\mu}\vec{E} + \frac{q}{\mu c}(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-, \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\vec{r}$  es la distancia entre los iones y  $\mu$  la masa reducida del sistema, en el caso en el cual el campo magnético es de la forma  $\vec{B} = (0, 0, B)$  las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega_T^2 x + \frac{q}{\mu}E_x + \frac{qB}{\mu c}v_y, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_T^2 y + \frac{q}{\mu}E_y - \frac{qB}{\mu c}v_x, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\omega_T^2 z + \frac{q}{\mu}E_z. \quad (\text{A.6})$$

En el caso de respuestas para el campo eléctrico y para  $\vec{r}$  de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}, \quad (\text{A.8})$$

podemos escribir

$$-\omega^2 x = -\omega_T^2 x + \frac{q}{\mu}E_x - i\omega_s \omega y, \quad (\text{A.9})$$

$$-\omega^2 y = -\omega_T^2 y + \frac{q}{\mu}E_y + i\omega_s \omega x, \quad (\text{A.10})$$

$$-\omega^2 z = -\omega_T^2 z + \frac{q}{\mu}E_z, \quad (\text{A.11})$$

donde

$$\omega_s = qB/\mu c \quad (\text{A.12})$$

es una frecuencia característica del sistema.

Organizando el conjunto de ecuaciones podemos estudiar el movimiento en el plano perpendicular a la dirección del campo magnético por medio de la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} (\omega_T^2 - \omega^2) & i\omega_s\omega \\ -i\omega_s\omega & (\omega_T^2 - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{q}{\mu} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

En tanto que en la dirección paralela al campo tendremos que:

$$z = \frac{q}{\mu} \frac{1}{(\omega_T^2 - \omega^2)} E_z. \quad (\text{A.14})$$

Con esto presente podemos escribir la relación entre  $\vec{r}$  y el campo eléctrico de la forma

$$\vec{r} = \frac{q}{\mu} M \vec{E}, \quad (\text{A.15})$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} \frac{(\omega_T^2 - \omega^2)}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^2 \omega^2} & \frac{-i\omega_s\omega}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^2 \omega^2} & 0 \\ \frac{i\omega_s\omega}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^2 \omega^2} & \frac{(\omega_T^2 - \omega^2)}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^2 \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\omega_T^2 - \omega^2)} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Recordando que el momento dipolar lo podemos escribir como  $\vec{p} = q\vec{r}$  y la polarización como  $\vec{P} = n\vec{p}$ , siendo  $n$  la densidad dipolar, podemos escribir el tensor dieléctrico de la forma,

$$\epsilon = \left[ I\epsilon_0 + \frac{nq^2}{\mu} M \right] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & -i\epsilon_2 & 0 \\ i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

donde

$$\epsilon_1 = \epsilon_0 + \frac{nq^2}{\mu} \frac{(\omega_T^2 - \omega^2)}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^2 \omega^2}, \quad (\text{A.18})$$

$$\epsilon_2 = \frac{nq^2}{\mu} \frac{\omega_s\omega}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^2 \omega^2}, \quad (\text{A.19})$$

$$\epsilon_z = \epsilon_0 + \frac{nq^2}{\mu} \frac{1}{(\omega_T^2 - \omega^2)}. \quad (\text{A.20})$$

Usando la relación de Lyddane-Sachs-Teller [15], podemos escribir para el tensor dieléctrico lo siguiente:

$$\epsilon_1 = \epsilon_\infty \left[ 1 + \frac{(\omega_L^2 - \omega_T^2)(\omega_T^2 - \omega^2)}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^2 \omega^2} \right], \quad (\text{A.21})$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_\infty \frac{\omega_s \omega (\omega_T^2 - \omega^2)}{(\omega_T^2 - \omega^2)^2 - \omega_s^2 \omega^2}, \quad (\text{A.22})$$

$$\epsilon_z = \epsilon_\infty \left( \frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega^2 - \omega_T^2} \right). \quad (\text{A.23})$$



## Apéndice B

# Calculo función permitividad eléctrica efectiva

Al aplicar un campo magnético uniforme sobre un material polaritónico la respuesta eléctrica cambia a una respuesta anisotrópica en el plano perpendicular al campo magnético aplicado (vease apéndice A).

En las siguientes paginas se propone un cálculo para la permitividad eléctrica efectiva de un bulk de material anisotrópico, cuando el campo eléctrico de la radiación incidente sobre el material está en el plano perpendicular a la dirección del campo magnético aplicado [24].

Sea la función dieléctrica del material de la forma

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & -i\epsilon_2 & 0 \\ i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

La ecuación de onda que define al campo magnético en el material será de la forma

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}, \quad (\text{B.2})$$

donde  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ .

Si nos preguntamos por la respuesta efectiva en la dirección perpendicular al campo magnético tendremos que, si el campo es de la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\vec{k}_{\parallel} \cdot \vec{r}_{\parallel} - \omega t)}, \quad (\text{B.3})$$

con  $\vec{E}_0 = (E_x, E_y, 0)$ , podremos escribir B.2 en el plano perpendicular a la dirección del campo magnético como

$$\begin{bmatrix} k_y^2 - \alpha^2 - k_0^2 \epsilon_1 & ik_0^2 \epsilon_2 - k_x k_y \\ -ik_0^2 \epsilon_2 - k_x k_y & k_x^2 - \alpha^2 - k_0^2 \epsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

donde  $k_0 = \omega/c$ ; esta última ecuación se satisface para la parte no homogénea de  $\vec{E}$ , si el determinante de la matriz es cero, haciendo  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$  tenemos que:

$$k_{\perp}^2 (-\alpha^2 - k_0^2 \epsilon_1) + \alpha^4 + 2\alpha^2 k_0^2 \epsilon_1 + k_0^4 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Resolviendo para  $k_{\perp}$  tenemos que

$$k_{\perp}^2 = \alpha^2 + k_0^2 \epsilon_1 - \frac{k_0^4 \epsilon_2^2}{\alpha^2 + k_0^2 \epsilon_1}. \quad (\text{B.6})$$

En el caso que  $\alpha = 0$ ,  $k_{\perp}^2 = k_0^2 \epsilon_V$ , donde

$$\epsilon_V = \epsilon_1 - \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1}, \quad (\text{B.7})$$

que será la respuesta eléctrica efectiva en la dirección perpendicular a la dirección del campo magnético aplicado.

# Bibliografía

- [1] John D. Joannopoulos, Steven G. Johnson, Joshua N. Winn, and Robert D. Meade, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light* (Princeton University Press, Princeton 2008).
- [2] K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, 2nd ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2005).
- [3] S. Anantha Ramakrishna, Tomasz M. Grzegorzczak, *Physics and Applications of Negative Refractive Index Materials*.
- [4] Nader Engheta, and Richard W. Ziolkowski, *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations* (IEEE Press, Wiley-Interscience 2006).
- [5] S. B. Cavalcanti, M. de Dios-Leyva, E. Reyes-Gomez, and L. E. Oliveira, Phys. Rev. B **74**, 153102 (2006).
- [6] Kusuaki Sakoda, Phys. Rev. B **72**, 184201 (2005).
- [7] Victor Veselago, Leonid Braginsky, Valery Shklover, and Christian Hafner, J. Comput. Theor. Nanosci. **3**, 1-30 (2006).
- [8] V. Kuzmiak, A. A. Maradudin, and F. Pincemin, Phys. Rev. B **50**, 16835 (1994).
- [9] V. Kuzmiak, A. A. Maradudin, and A. R. McGurn, Phys. Rev. B **55**, 4298 (1997).
- [10] Vladimir Kuzmiak, And Alexei A. Maradudin, Phys. Rev. B **58**, 7230 (1998).
- [11] Kazuaki Sakoda, Noriko Kawai, Takunori Ito, Alongkarn Chutinan, Susumu Noda, Tsuneo Mitsuyu, and Kazuyuki Hirao, Phys. Rev. B **64**, 045116 (2001).
- [12] Takunori Ito, and Kazuaki Sakoda, Phys. Rev. B **64**, 045117 (2001).
- [13] Esteban Moreno, Daniel Erni, and Christian Hafner, Phys. Rev. B **65**, 155120 (2002).
- [14] Kerwyn Casey Huang, Peter Bienstman, John D. Joannopoulos, Keith A. Nelson, and Shanhui Fan, Phys. Rev. B **68**, 075209 (2003).
- [15] C. Kittel, *Introduction to Solid States Physics*, 7th ed. (Wiley, New York, 1966).
- [16] C. A. Duque, N. Porras-Montenegro, S. B. Cavalcanti, and L. E. Oliveira, J. Appl. Phys. **105**, 034303 (2009).
- [17] H. Neměc, P. Kuzěl, F. Kadlec, C. Kadlec, R. Yahiaoui, and P. Mounaix, Phys. Rev. B **79**, 241108 (2009).
- [18] Ju-Ying Chen, Yu-Chuan Chen, Chih-Ming Wei, and Yang-Fang Chen, Opt. Lett. **36**, 2563 (2011).

- [19] R. Meisels, O. Glushko, and F. Kuchar, *Phot. Nano. Fund. Appl.* **10**, 60-68 (2012).
- [20] N. Porras-Montenegro, C. A. Duque, *Physica E* **42**, 1865-1869 (2010).
- [21] Shouyuan Shi, Caihua Chen, and Dennis W. Prather, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 043104 (2005)
- [22] Lifeng Li, *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 1870 (1996).
- [23] Philippe Lalanne, *Phys. Rev. B* **58**, 9801 (1998).
- [24] J. J. Brion , R. F. Wallis, A. Hartstein, E. Burstein, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1455 (1972).
- [25] Stefan Maier, *Plasmonics: Fundamentals and Applications* (Springer Science+Business Media LLC, 2007).
- [26] Xioashuang Chen, Renlong Zhou, Yong Zeng, Hongbo Chen, and Wei Lu, *Advances in Optoelectronics*, Volume 2007 (2007), Article ID 61034, 8 pages.
- [27] V. G. Veselago, *Sov. Phys. Usp.* **10**, 509 (1968).
- [28] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins and W. J. Stewart, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **47**, 2075 (1999).
- [29] J. B. Pendry, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000).
- [30] A. Bruno-Alfonso, E. Reyes-Gomez, S. B. Cavalcanti, and L. E. Oliveira, *Phys. Rev. A* **78**, 035801 (2008).
- [31] E. Reyes-Gómez, D. Mogilevtsev, S. B. Cavalcanti, A. A. De Carvalho, and L. E. Oliveira, *EPL*, **88**, 24002 (2009).
- [32] T. Koschny, M. Kafesaki, E. N. Economou and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 107402 (2004).
- [33] J. R. Mejía - Salazar. *J. Appl. Phys.* **114**, 223513 (2013).